

- 
- Zet de naam van je assistent of het nummer van je tutorgroep op je werk
  - Je mag gebruik maken van de formulekaart van het vwo, de formulekaart zoals die op de website van dit vak staat, een eenheidscirkel en een rekenmachine
  - Laat zien hoe je aan je antwoord komt (je kunt wel punten krijgen voor een half goede redenatie, maar niet voor *alleen* een goed eind-antwoord!)
  - 1 punt vooraf, per vraag is aangegeven hoeveel punten er maximaal gegeven worden
  - Schrijf duidelijk en werk systematisch: onleesbaar geknoei wordt niet beoordeeld
- 

**Som 1:** Gegeven:  $\cos \theta = \frac{2}{3}$  en  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  [ 1 ]  
Gebruik de rekenregels om te laten zien dat  $\sin 2\theta = \frac{4}{9}\sqrt{5}$  en  $\cos 2\theta = -\frac{1}{9}$

**Som 2:** Los op voor  $x$ :

a.  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(2x^3) = \ln 3$  [  $\frac{3}{4}$  ]

b.  $e^{-2x} - 3e^{-x} = -2$  [ 1 ]

**Som 3:** Bepaal  $\frac{dy}{dx}$ :

a.  $y = \sin^2(x) + \cos^2(x)$  [  $\frac{1}{2}$  ]

b.  $y = \frac{x^2+2}{3x-4}$  [  $\frac{3}{4}$  ]

c.  $y = \ln(1 + \sin(x^2))$  [  $\frac{3}{4}$  ]

**Som 4:** Bepaal  $\frac{dy}{dx}$ :

a.  $y^2 + x^3 - 6xy + e^y = 0$  [  $1\frac{1}{4}$  ]

b.  $y = (x^2 + 6x^3 + 3)^2(x + 4)^{-3}$  [ 1 ]

**Som 5:** Gegeven  $f(x) = x^3 + ax$ , met  $a$  een constante.

a. Voor welke waarden van  $a$  heeft deze functie extremen (toppen en dalen)? [ 1 ]

b. Geef de  $x$ -coördinaat van de extremen van deze functie [ 1 ]

# Uitwerkingen Tussentoets Wiskunde 2023

Som 1  $\cos \theta = \frac{2}{3}$  &  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{4}{9}$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm \sqrt{\frac{5}{9}} = \pm \frac{1}{3} \sqrt{5}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \theta \text{ is positief} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{3} \sqrt{5}$$

$$\underline{\underline{\sin 2\theta}} = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{5} = \underline{\underline{\frac{4}{9} \sqrt{5}}}$$

$$\underline{\underline{\cos 2\theta}} = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \cdot \frac{4}{9} - 1 = \frac{8}{9} - 1 = \underline{\underline{-\frac{1}{9}}}$$

## Som 2

A.  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln(2x^3) = \ln 3$

$$\ln\left(\frac{2x^3}{x}\right) = \ln 3$$

$$\frac{2x^3}{x} = 3$$

$$2x^2 = 3$$

$$x^2 = \frac{3}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Som 2

b.  $e^{-2x} - 3e^{-x} = -2$

$$e^{-x} = y$$

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$(y-1)(y-2) = 0$$

$$y = 1 \quad \text{of} \quad y = 2$$

$$e^{-x} = 1 \quad \text{of} \quad e^{-x} = 2$$

$$x = 0 \quad \text{of} \quad x = -\ln 2$$

Som 3

A.  $y = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

b.  $y = \frac{x^2 + 2}{3x - 4}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x-4) \cdot 2x - (x^2+2) \cdot 3}{(3x-4)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 - 8x - 3x^2 - 6}{(3x-4)^2} \quad \text{of} \quad \frac{6x^2 - 3x^2 - 8x - 6}{9x^2 - 24x + 16}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8x - 6}{(3x-4)^2} \quad \text{of} \quad \frac{3x^2 - 8x - 6}{9x^2 - 24x + 16}$$

Som 3

$$c \quad y = \ln(1 + \sin(x^2))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \sin(x^2)} \cdot \frac{d}{dx} (1 + \sin(x^2))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot \frac{d}{dx} x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x \cos(x^2)}{1 + \sin(x^2)}$$

Som 4

A.

$$y^2 + x^3 - 6xy + e^y = 0$$

$$\frac{d}{dx} y^2 + \frac{d}{dx} x^3 - \frac{d}{dx} 6xy + \frac{d}{dx} e^y = \frac{d}{dx} 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} + 3x^2 - [6y + 6x \frac{dy}{dx}] + e^y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y \frac{dy}{dx} - 6x \frac{dy}{dx} + e^y \frac{dy}{dx} = -3x^2 + 6y$$

$$[2y - 6x + e^y] \frac{dy}{dx} = -3x^2 + 6y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 + 6y}{2y - 6x + e^y}$$

Soln 4

$$b \quad y = (x^2 + 6x^3 + 3)^2 (x+4)^{-3}$$

$$\ln y = \ln((x^2 + 6x^3 + 3)^2 (x+4)^{-3})$$

$$\ln y = \ln(x^2 + 6x^3 + 3)^2 + \ln(x+4)^{-3}$$

$$\ln y = 2 \ln(x^2 + 6x^3 + 3) - 3 \ln(x+4)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{2x + 18x^2}{x^2 + 6x^3 + 3} - 3 \cdot \frac{1}{x+4}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \left[ \frac{2(2x + 18x^2)}{x^2 + 6x^3 + 3} - \frac{3}{x+4} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 6x^3 + 3)^2}{(x+4)^3} \cdot \left[ \frac{2(2x + 18x^2)}{x^2 + 6x^3 + 3} - \frac{3}{x+4} \right]$$

of:

$$y = (x^2 + 6x^3 + 3)^2 (x+4)^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 6x^3 + 3)^2 \frac{d}{dx} (x+4)^{-3} + (x+4)^{-3} \frac{d}{dx} (x^2 + 6x^3 + 3)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 6x^3 + 3)^2 \cdot -3(x+4)^{-4} + (x+4)^{-3} \cdot 2(x^2 + 6x^3 + 3) \cdot (2x + 18x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(x^2 + 6x^3 + 3)^2}{(x+4)^4} + \frac{2(x^2 + 6x^3 + 3)(2x + 18x^2)}{(x+4)^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 6x^3 + 3}{(x+4)^3} \left[ \frac{-3(x^2 + 6x^3 + 3)}{x+4} + 2(2x + 18x^2) \right]$$

Soan 5

A.  $f(x) = x^3 + Ax$

top of dal:  $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{d}{dx} f(x) = 3x^2 + A$$

$$3x^2 + A = 0$$

$$3x^2 = -A$$

$$x^2 = \frac{-A}{3}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-A}{3}}$$

Bestaat alleen voor  $A \leq 0$  :

als  $A = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} f(x) = 3x^2$

in de oorsprong versuident  
het teken niet  $\Rightarrow$  geen top/dal

als  $A < 0 \Rightarrow$  2 extremen

Dus top/dal voor  $A < 0$

b. De x-coördinaten worden gegeven  
door

$$\underline{\underline{x = -\sqrt{\frac{-A}{3}}}} \quad \text{en} \quad \underline{\underline{x = \sqrt{\frac{-A}{3}}}}$$